تعريف:

هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ التي تنعدم في 1 نرمز لها ب: ln

خاصيات

ln1=0   lne=1   ln(e^r)=r

$$\forall (a,b) \in IR^{+*} \times IR^{+*} : \ln(a.b) = \ln a + \ln b$$

$$\forall (a,b) \in IR^{+*} \times IR^{+*} : \ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$$

$$\forall a \in IR^{+*} : \ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$$

$$\forall a \in IR^{+*} : \ln(a^r) = r.\ln a$$

$$\forall x \in IR^* : \ln(x^2) = 2\ln|x|$$

$$\forall a \in IR^{+*} : \ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}.\ln a$$

مجموعات التعريف

* f(x)=ln(u(x))

Df={x   IR / x   Du   u(x)   0}

* f(x)=ln(Iu(x)I)

Df={x   IR / x   Du et   u(x)   0}

خاصيات تحليلية

$$\forall x \in]0,+\infty[: \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\forall x \in]0,+\infty[: \ln''(x) = -\frac{1}{x^2} \prec 0$$

$$\forall x \in]0,+\infty[: \ln x \le x-1$$

نهايات هامة

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} x\ln x = 0$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

المسألة

نعتبر f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\ln\left(1-x^3\right) & ; \quad x \prec 0 \\ f(x)=4x\sqrt{x}-3x^2 & \quad x \geq 0 \end{cases}$$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم.

1) أ- بين أن الدالة f متصلة في 0.

ب- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق في 0 (نذكر بأن $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$)

2) بين أن f تناقصية على المجالين $]-\infty;0[$ و $]1;+\infty[$ و تزايدية على المجال $[0;1]$.

3) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- تحقق من أنه لكل $x \prec 0$; $\frac{f(x)}{x}=3\frac{\ln(-x)}{x}+\frac{\ln\left(1-x^{-3}\right)}{x}$

ج- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C).

4) أنشئ المنحنى (C).

5) ليكن h قصور الدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

أ- بين أن h تقابل من $]-\infty;0[$ نحو مجال J يجيب تحديده .

ب- حدد $h^{-1}(x)$ لكل x من J.

6) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي:

$$u_0=\frac{4}{9} \text{ و } u_{n+1}=4u_n\sqrt{u_n}-3u_n^2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

يمكنك في ما يلي استعمال نتائج دراسة الدالة f.

أ- بين بالترجع أن $\frac{4}{9}\leq u_n \leq 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ب- بين أن المتتالية (u_n) تزايدية.

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.